REPORTE DE INVESTIGACION

TEMA

Estudio del algoritmo de Viterbi para decodificación basado en la minimización de la probabilidad de error de palabra

MARIBELL SACANAMBOY FRANCO

Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA CALI

En este reporte se presenta el estudio de uno de los algoritmos más usados en la decodificación, para un sistema de comunicación, basado en la minimización de la probabilidad de error de palabra.

Antes de revisar el algoritmo de Viterbi en la decodificación, se debe entender que el codificador usado es basado en códigos convolucionales.

Un código convolucional es un código de corrección de errores, en el cual por cada secuencia de m bits de entrada los codifica en n bits símbolos de salida. La relación de m/n es definida como la tasa de código.

Un código convolucional es caracterizado por una función de codificación G(x), dada una secuencia m(x) de entrada genera una secuencia de salida U(x), donde U(x) se le denomina secuencia de codewords y está en función del producto de G(x) y de m(x) de la siguiente manera:

$$U(x)=m(x)*G(x)$$

Dentro de las representaciones que más se usan en un código convolucional, está la de polinomios generadores, la del diagrama de estados y diagrama de trellis.

Algoritmo basado en la minimización de la probabilidad de error de palabra

Algoritmo de Viterbi

se considera un algoritmo de máxima certeza (Maximum likelihood) y altamente paralelizable, y consiste en determinar el camino más óptimo expresado como la escogencia del codeword con la métrica de máxima certeza o la escogencia del codeword con la métrica de mínima distancia, este algoritmo toma ventaja de la estructura espacial del diagrama de trellis.

Para hallar el camino más óptimo compara en cada tiempo t_i la señal recibida o codeword con todos los caminos del trellis que entran a cada estado en el tiempo t_i y elimina los caminos que no son posibles candidatos para la escogencia de la máxima certeza; la comparación de la señal recibida frente a la establecida del trellis se hace por medio del cálculo de la distancia hamming (Número de posiciones en las cuales difieren dos codewords) para decisiones duras y para decisiones suaves la distancia euclidiana la cual se define a continuación.

Los vectores de los codewords para decisiones suaves se representan por números reales, entonces la diferencia entre estos codewords se determina por la diferencia entre los elementos de cada codeword al cuadrado.

Codewords X =[x_0, x_1, x_2, x_3. .. x_L] , Y=[y_0, y_1, y_2, y_3. .. y_L] entonces la distancia euclidiana esta dada por

$$dE(X,Y)=\sqrt{(X_0-Y_0)^2+(X_1-Y_1)^2+...(X_L-Y_L)^2} \quad (1)$$

A la distancia hamming o euclidiana se le llama métrica de rama (λ).

Para dos caminos que entran al mismo estado en el tiempo t_i se escoge el de mejor métrica de distancia acumulada, la cual es calculada por medio de la métrica del estado en el tiempo t_{i-1} más la métrica de rama (λ), la métrica acumulada o de estado se expresa como:

$\mu_{ti} = \mu_{ti-1} + \lambda$ (2)

Después de tener las dos métricas de distancia acumulada del camino j y k, se escoge la métrica de menor distancia o peso para el caso de decisión dura μ_{ti}=min[μ_{jti} ,μ_{kti}] ,y para el caso de decisión suave se escoge la métrica de mayor peso μ_{ti}=max[μ_{jti} ,μ_{kti}] ; al camino elegido se le llama camino sobreviviente $\hat{m}_k$ y a la métrica del camino ganador se le llama métrica de estado en el tiempo t_i y esto se hace para todos los estados, el decodificador continua así avanzando por el trellis eliminando y escogiendo el camino más probable.

Para determinar la probabilidad de error para un canal binario simétrico (BSC) y un canal AWGN trabajando con el algoritmo de Viterbi se debe hacer dos suposiciones, la primera es que todos los posibles codewords son igualmente probables y la segunda es que la probabilidad de error debe ser independiente de la secuencia transmitida, de la segunda suposición se deriva que se debe trabajar con canales sin memoria, en los cuales el ruido afecta a los símbolos de manera independiente con respecto a los símbolos anteriores.

En un canal sin memoria la probabilidad condicional o función de certeza (likelihood) está dada por lo siguiente: $p(y|x) = \prod_{all\, k} p(y_k|x_k)$ (3),

donde y es la secuencia recibida y x es la secuencia enviada. Para encontrar el camino más probable o el de máxima certeza (Maximum likelihood) ó de la mínima probabilidad de error, se debe maximizar la función de certeza, computacionalmente es más conveniente usar el logaritmo de la función de certeza .Entonces la función de logaritmo de certeza queda expresada como:

$$\Lambda(X, Y) = \ln p(y|x) = \sum_{all\, k} \ln p(y_k|x_k) \quad (4)$$

La métrica para una rama j está definida como:

$$\mu_j = \mu(x_j, y_j) = \ln p(y_j|x_j) \quad (5)$$

Para vectores n dimensionales con n símbolos por rama se tiene que la métrica de la rama j es igual a :

$$\mu_j = \ln p(y_j|x_j) = \sum_{1}^{n} \ln p(y_{jk}|x_{jk}) \quad (6)$$

Ahora reemplazando la definición de métrica de rama de la ecuación (5) en la ecuación (6) se obtiene la función de logaritmo de certeza como la sumatoria de todas las métricas de la ramas.

$$\Lambda(X, Y) = \sum_{j=todas\, las\, ramas} \mu(x_j|y_k) \quad (7)$$

Para obtener la función de máxima certeza sólo se debe hallar el máximo de la función logaritmo de certeza (max $\Lambda(x,y)$).

Trabajando sobre un canal simétrico binario, el cual sirve para representar la decodificación de decisiones duras, es decir el decodifcador determina si la secuencia de bits recibida es cero o uno. Para este caso se tiene que la probabilidad de error de símbolo es $p<1/2$.

Dado una secuencia binaria y recibida y una secuencia binaria x transmitida, para hallar la función de máxima certeza según la ecuación (7), basta con hallar la métrica de cada rama y hacer la sumatoria, entonces la métrica de rama para un canal BSC está dada en función de la probabilidad de error y es igual a :

$$\mu_j=\mu(x_j,y_j)=\ln[p^{dj}(1-p)^{n-dj}]=dj\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)+n\ln(1-p) \quad (8),$$

donde n es el tamaño de la secuencia recibida, dj es la distancia hamning entre x_j y y_j en la j-ésima rama, entonces $dj=d(x_j, y_j)$

De acuerdo a la ecuación (7), la meta para un canal BSC es maximizar la suma de métricas de cada rama sobre el camino o trayectoria completa, para esto se adiciona una constante arbitraria en cada rama y se escala el resultado en un número positivo arbitrario, además como la expresión $\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)<0$ para $p<1/2$ entonces se reemplaza la métrica μj por la métrica escalada

$$\hat{\mu}_j=-d_j=-d(x_j,y_j) \quad (9)$$

Para hallar el camino de máxima certeza en un tiempo t_i se compara las métricas de todos los estados en el tiempo t_i y se escoge la métrica de menor peso y esta determina el camino de mayor probabilidad.

Trabajando sobre un canal con ruido blanco gausiano aditivo, la secuencia $y(t)=x(t)+n(t)$ de símbolos de salida corresponde a la salida de este canal, donde $x(t)$ es la secuencia original transmitida y $n(t)$ es la muestra de ruido AWGN. Para este canal se tiene una secuencia transmitida normalizada x en +1 o -1 si el símbolo de código fue 0 ó 1 respectivamente, como $n(t)$ es una variable aleatoria gausina, entonces para calcular la métrica de la rama según la ecuación (6) se debe tener en cuenta la función de densidad de probabilidad. Así que la métrica par la rama j-ésima quede expresada de la siguiente forma:

$$\mu_j=\ln(y_j|x_j)=\ln\left\{e^{[-\sum_{k=1}^{n}(y_{jk}-\sqrt{Es}X_{jk})^2/I_0]}/(\Pi I_o)^{(n/2)}\right\} \quad (10)$$

Donde I_0 es es la potencia del ruido y Es la energía por símbolo de código, desarrollando la ecuación (10) se llega a la siguiente expresión:

$$\mu_j=\ln(y_j|x_j)=1/I_0[-\sum_{k=1}^{n}(y_{jk}-\sqrt{Es}X_{jk})^2]-n\ln(\Pi I_o)/2 \quad (11)$$

Al desarrollar el binomio y teniendo en cuenta que x puede ser +1 o -1, la ecuación (11) queda finalmente

$$\mu_j=\ln(y_j|x_j)=1/I_0[-\sum_{k=1}^{n}(y_{jk}^2)-n\,Es+2\sqrt{Es}\sum_{k=1}^{n}X_{jk}\,y_{jk}]-n\ln(\Pi I_o)/2 \quad (12)$$

Escalando la ecuación (12) por I_0 se llega a la siguiente métrica escalada:

$$\hat{\mu}_j = \sum_{k=1}^{n} X_{jk} y_{jk} \quad (13)$$

En resumen los pasos que se deben tener en cuenta para la decodificación usando el algoritmo de Viterbi están dados en el siguiente gráfico.

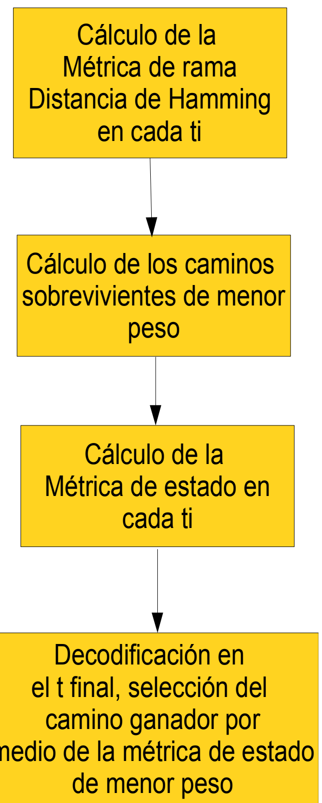

Figura 1. Diagrama de bloques Algoritmo Viterbi

En el siguiente ejemplo se muestra el algoritmo de Viterbi para una decodificación de un mensaje enviado por un codificador convolucional de rata 1/2 y con M= 2, donde M es el número de registros de desplazamiento del codificador, y los polinomios generadores $g_0(x)= 1+x+x^2$, $g_1(x)= 1+x^2$.

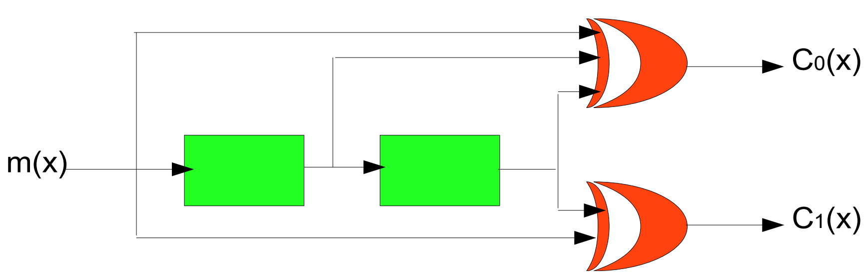

Figura 2. Codificador Convolucional

$C_o(x)=m(x)g_0(x)$ $C_1(x)=m(x)g_1(x)$, donde m(x) es el mensaje de entrada al codificador.

Si se tiene el siguiente mensaje m= 1 1 0 1 1, el mensaje codificado U se obtiene por medio de las ecuaciones C_o y C_1.

U= 11 01 01 00 01

Si este mensaje codificado se transmite por un canal binario, el decodificador recibe la siguiente secuencia Z= 11 01 01 10 01.

En la figura 3 se muestra el diagrama de estados para el codificador planteado en la figura2.

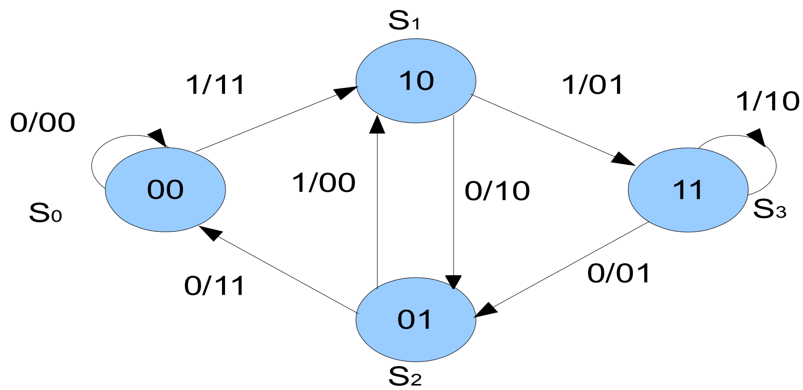

Figura 3. Diagrama de estados

Otra forma de representar el codificador convolucional es el diagrama de trellis, en la figura 4 se muestra el diagrama.

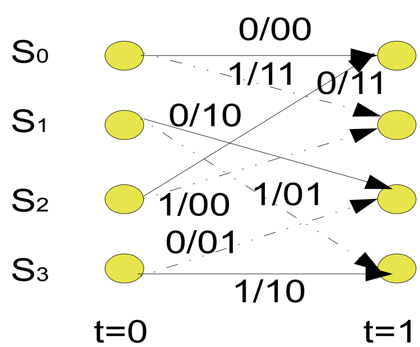

Figura 4. Diagrama de trellis para el codificador

En la figura 5 se presenta el diagrama de trellis para el decodificador, con los valores de las ramas de acuerdo a la distancia de hamming.

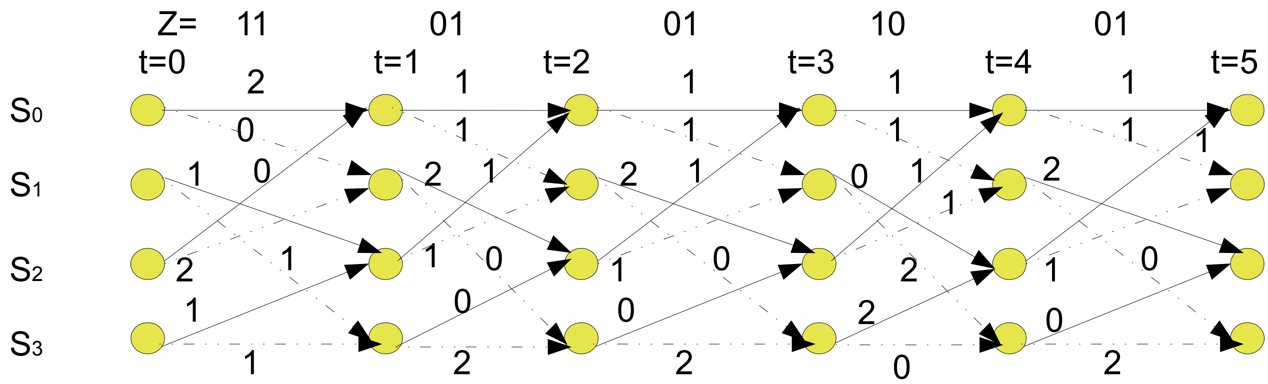

Figura 5. Diagrama de trellis para el decodificador

En la figura 6 se muestra el cálculo de la métrica de estado, se tiene como condición inicial que el sistema inicia en el estado S_0 y el valor de la métrica de estado es cero y en los demás estados es infinito.

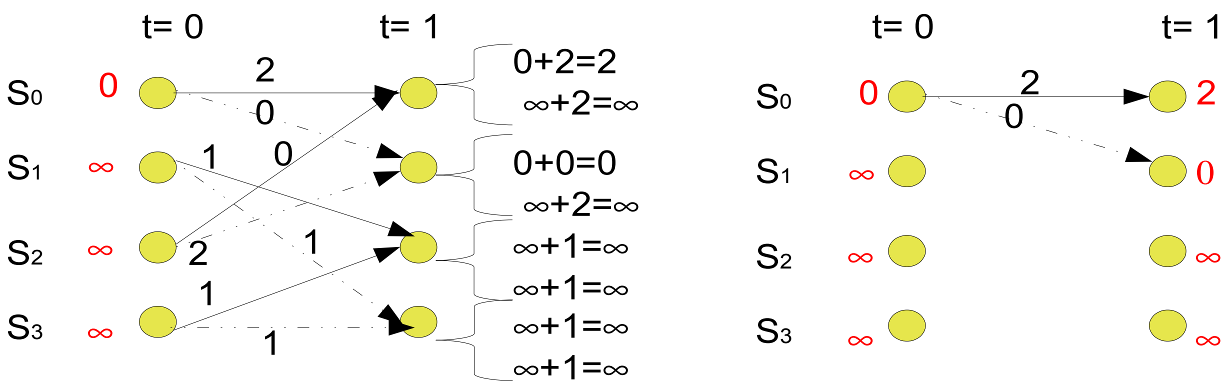

Figura 6. Cálculo de métrica de estado

Continuando con el cálculo de las métricas de estado, empieza aparecer los posibles caminos de máxima certeza, en la figura 7 se observa los caminos y métricas de estado que quedan al final.

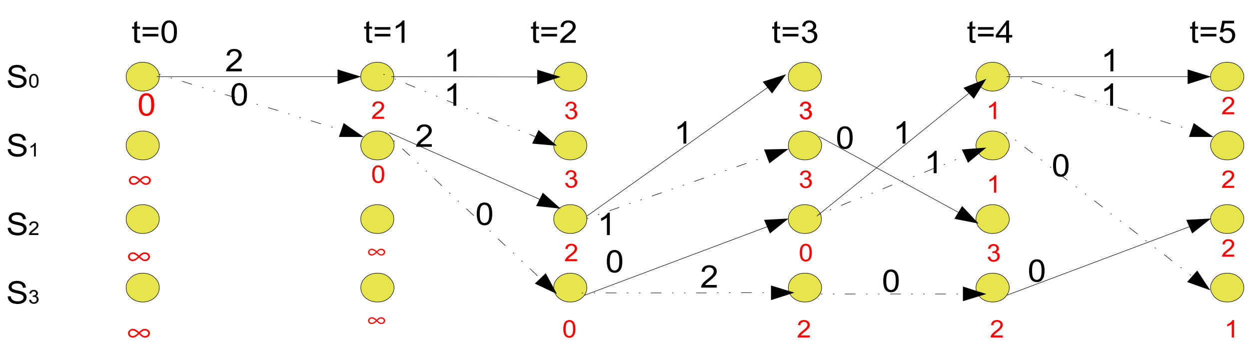

Figura 7. Caminos y métricas de estado

Para la decodificación final en t=5,se tiene en cuenta cual estado es el de menor métrica y se sigue el camino hacia atrás.

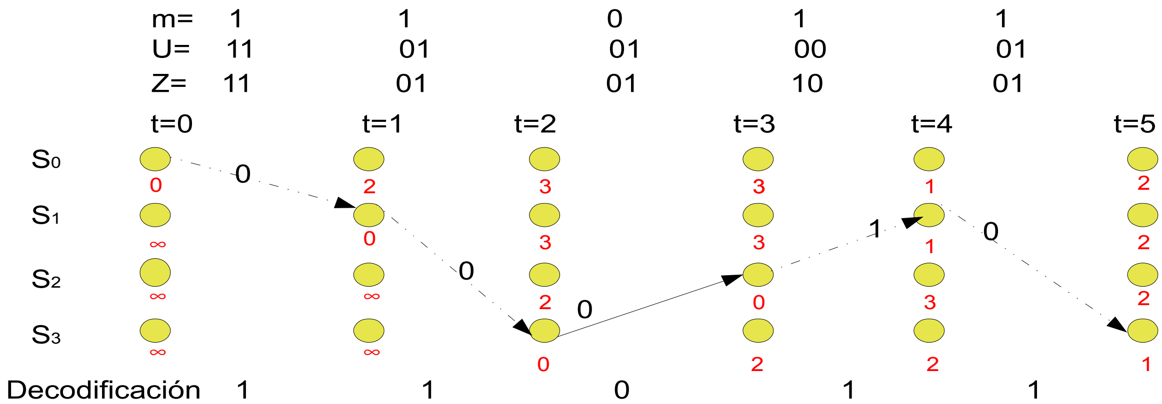

Figura 8. Decodificación final.

Bibliografía

- Capítulo 7 del libro de B Sklar, "Digital Communications Fundamentals and Applications",Prentice Hall, NewJersey,1988.
- Capítulo 5 del libro de Andrew J. Viterbi, "CDMA Principles of Spread Spectrum Communication".
- Capítulo 6 del libro de Richard Wells "Applied Information Teory and Coding For Engineers".