



Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Programación por Restricciones

Gerardo M. Sarria M.

Pontificia Universidad Javeriana

4 de agosto de 2008



Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

RESTRICCIONES



Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

1 Restricciones y Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

2 Modelando con Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

3 Satisfacción de Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

4 Otros Dominios de Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

5 Propiedades de los Constraint Solvers



Gerardo M.
Sarria M.

Variables y Restricciones

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Variable:

Nombre que identifica un espacio para almacenar un valor (solo uno!).

Usualmente X, Y, \dots (mayúsculas).

Restricción:

Relación entre variables que se debe cumplir entre todos los valores escogidos para esas variables.

Ejemplo:

$$X = Y + 2 \quad \text{Satisfacible}$$

$$X = X + 2 \quad \text{Insatisfacible}$$



Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Restricciones: Sintaxis

La sintaxis y la semántica de las restricciones se especifican por medio de un **Dominio de Restricciones**.

Dominio:

Conjunto de valores que pueden tomar las variables.

Ejemplo: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R}

Sintaxis:

- Constantes: Ej. 0, 1
- Funciones: Ej. +
- Relaciones: Ej. \leq

La sintaxis en funciones o relaciones especifica cuántos argumentos se tienen, de qué tipo, si se trabaja con expresiones infijas, posfijas o prefijas.



Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Semántica:

- ¿Qué significan las constantes?
- ¿Qué significan los símbolos de función?
- ¿Qué significan los símbolos de relación?

Ejemplos de Dominios de Restricciones:

- 1 $(\mathbb{N}, 0, \textit{sucesor}, +, <, =)$
- 2 $(\mathbb{N}, 0, 1, \textit{sucesor}, +, \times, <, =)$
- 3 $(\mathbb{N}, \textit{flotantes}, +, \times, -, /, <, \leq, >, \geq)$

Gerardo M.
Sarría M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Una **restricción primitiva** consiste en un símbolo de relación de D , junto con el número de argumentos apropiado.

Los argumentos se construyen con las constantes, los símbolos de función de D y con las variables.

Ejemplo: $1,8 + (3,5 \times Y + Z) \leq X$

Definición 1:

Una **restricción** es una secuencia de cero o más restricciones primitivas unidas por “conjunciones lógicas” (\wedge).

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Ejemplo:

$$c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_n,$$

siendo c_1, c_2, \dots, c_n restricciones primitivas.

En el caso anterior, $c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_n$ se cumple si c_1, c_2, \dots, c_n se cumplen.

Existen dos restricciones definidas y claras:

- true - Siempre se cumple
- false - Nunca se cumple

El conjunto vacío de restricciones es escrito como true.



Gerardo M.
Sarría M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Definición 2:

Una **valuación** θ para un conjunto V de variables, es una asignación de valores del dominio de restricciones a las variables de V .

Si $V = \{X_1, \dots, X_n\}$, entonces θ se escribe $\{X_1 \mapsto d_1, \dots, X_n \mapsto d_n\}$.

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Dada una expresión e , $\theta(e)$ denota el valor de la expresión si se reemplaza cada variable con su correspondiente valor y se calcula el resultado de la expresión.

Sea C una restricción, entonces $vars(C)$ denota el conjunto de variables en C .

Si θ es una valuación para $V \supseteq vars(C)$, entonces θ es una solución para C si $\theta(C)$ se cumple en el dominio de la restricción.

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Una restricción C es **satisfacible** si tiene alguna solución. De lo contrario es **insatisfacible**.

Ejemplo 1:

$$C : X \geq 4$$

$\theta : \{X \mapsto 5\}$ es solución de C .

$\theta : \{X \mapsto 5, Y \mapsto 7\}$ es solución de C .

$\theta : \{X \mapsto 0\}$ no es solución de C .

De allí que la restricción es satisfacible.

Ejemplo 2:

$$C : X \leq 3 \wedge X = Y \wedge Y \geq 4$$

No tiene soluciones, por lo que es insatisfacible.

Gerardo M.
Sarría M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Definición 3:

Dos restricciones C_1 y C_2 son **equivalentes** ($C_1 \leftrightarrow C_2$), si ellas tienen el mismo conjunto de soluciones.

Ejemplo 1:

$$C_1 : X = 0 \wedge Y = 1$$

$$C_2 : Y = 1 \wedge X = 2$$

En este caso $C_1 \leftrightarrow C_2$.

Ejemplo 2:

$$C_1 : X \geq 0 \wedge Y = X + 2$$

$$C_2 : X = Y - 2 \wedge Y \geq 2$$

Aquí $C_1 \leftrightarrow C_2$.

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

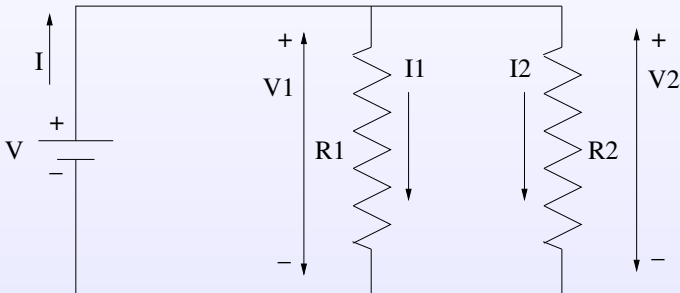
Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Ejemplo 1 (Circuitos Eléctricos):



Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

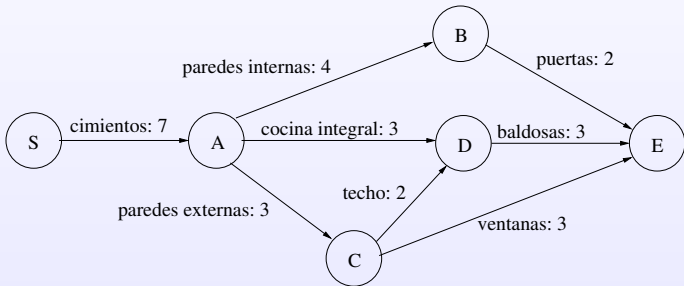
Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Ejemplo 2 (Construcción de una casa):





Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

¿Cuáles son las soluciones a las restricciones?

- **problema de la solución:** Deme una solución a las restricciones, si existe.
- **problema de satisfacción:** ¿Las restricciones tienen solución?

El problema de satisfacción se resuelve con un algoritmo llamado: **Constraint Solver**.

Dicho algoritmo construye también una solución, de esta forma puede ser usado para resolver el problema de la solución.



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

La forma más obvia para resolver el problema de satisfacción (algoritmo ingenuo) es:

- 1 Enumerar las valuaciones.
- 2 Probar una por una hasta que se encuentre una que cumple la restricción.

Ejemplo:

$C : X > Y$, donde X y Y son números naturales.



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarría M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

**Satisfacción
de
Restricciones**

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en un orden:



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en un orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$ `false`



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en un orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$ **false**

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$ **false**



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en un orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$ **false**

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$ **false**

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 3\}$ **false**



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en un orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$	<code>false</code>
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$	<code>false</code>
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 3\}$	<code>false</code>
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 4\}$	<code>false</code>



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones


Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en un orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$	false
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$	false
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 3\}$	false
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 4\}$	false
\vdots	


y no se encuentra solución



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en otro orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$ `false`



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en otro orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$ `false`

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$ `false`



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en otro orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$	<code>false</code>
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$	<code>false</code>
$\{X \mapsto 2, Y \mapsto 1\}$	<code>true</code>



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarría M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en otro orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$	false
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$	false
$\{X \mapsto 2, Y \mapsto 1\}$	true
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 3\}$	false



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en otro orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$	false
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$	false
$\{X \mapsto 2, Y \mapsto 1\}$	true
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 3\}$	false
$\{X \mapsto 2, Y \mapsto 2\}$	true



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en otro orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$	false
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$	false
$\{X \mapsto 2, Y \mapsto 1\}$	true
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 3\}$	false
$\{X \mapsto 2, Y \mapsto 2\}$	true
$\{X \mapsto 3, Y \mapsto 1\}$	true



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarría M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en otro orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$	false
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$	false
$\{X \mapsto 2, Y \mapsto 1\}$	true
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 3\}$	false
$\{X \mapsto 2, Y \mapsto 2\}$	true
$\{X \mapsto 3, Y \mapsto 1\}$	true
$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 4\}$	false



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarría M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se enumeran las soluciones en otro orden:

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 1\}$ false

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 2\}$ false

$\{X \mapsto 2, Y \mapsto 1\}$ true

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 3\}$ false

$\{X \mapsto 2, Y \mapsto 2\}$ true

$\{X \mapsto 3, Y \mapsto 1\}$ true

$\{X \mapsto 1, Y \mapsto 4\}$ false

⋮

⏟
y se encuentra solución



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Del ejemplo anterior, se tienen tres conclusiones:

- Si C es satisfacible, encuentra una solución, pero no hay forma de determinar (en un tiempo finito) que la restricción es insatisfacible.
- Si el dominio son los números reales, no se pueden enumerar todas las posibles soluciones.
- Las restricciones solo se usan para probar el resultado de aplicar una valuación.



Satisfacción de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Del ejemplo anterior, se tienen tres conclusiones:

- Si C es satisfacible, encuentra una solución, pero no hay forma de determinar (en un tiempo finito) que la restricción es insatisfacible.
- Si el dominio son los números reales, no se pueden enumerar todas las posibles soluciones.
- Las restricciones solo se usan para probar el resultado de aplicar una valuación.

Por esto, **el algoritmo ingenuo NO SIRVE!!!**

Luego, se debe buscar una manera de resolver el problema de satisfacción usando las restricciones como ayuda para construir una valuación que sea una solución.



Restricciones Aritméticas Lineales

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Una **expresión lineal** es de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, donde cada a_i es un número y cada x_i es una variable, con $1 \leq i \leq n$.

Una **ecuación lineal** es de la forma $e_1 = e_2$, donde e_1 y e_2 son expresiones lineales. Similarmente, una desigualdad lineal es de la forma $e_1 \leq e_2$, $e_1 < e_2$, $e_1 > e_2$ o $e_1 \geq e_2$, donde e_1 y e_2 son expresiones lineales.

Una **restricción lineal** es una conjunción de ecuaciones y desigualdades lineales.

Teniendo restricciones lineales, se puede usar un *solver* que use **Eliminación de Gauss-Jordan**, de manera que cada restricción se reescriba como una equivalente hasta construir una restricción en forma resuelta.



Restricciones Aritméticas Lineales

Gerardo M.
Sarría M.

Ejemplo:

Se tiene la siguiente conjunción de ecuaciones.

$$1 + X = 2Y + Z \wedge$$

$$Z - X = 3 \wedge$$

$$X + Y = 5 + Z$$

Se selecciona la primera ecuación, se reescribe en la forma

$$X = 2Y + Z - 1$$

Se reemplazan las otras ocurrencias de X y se obtiene

$$X = 2Y + Z - 1 \wedge$$

$$Z - 2Y - Z + 1 = 3 \wedge$$

$$2Y + Z - 1 + Y = 5 + Z$$

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers



Restricciones Aritméticas Lineales

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Se simplifica la segunda ecuación a $-2Y = 2$, de manera que se puede reescribir a $Y = -1$ y reemplazar Y por -1 en las otras ecuaciones obteniendo

$$X = Z - 3 \wedge$$

$$Y = -1 \wedge$$

$$-2 + Z - 1 - 1 = 5 + Z$$

La ecuación final simplifica a $-4 = 5$, lo cual demuestra que la restricción original es insatisfacible.



Gerardo M.
Sarria M.

Algoritmo Gauss-Jordan

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

```
r is a real number;  
x is a variable;  
e is a linear arithmetic expression;  
c is an equation;  
C, C0 and S are conjunctions of equations.  
  
gauss_jordan_solve(C)  
  if gauss_jordan(C) = false then return false  
  else return true  
endif
```



Algoritmo Gauss-Jordan

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

```
gauss_jordan(C)
  S := true
  while C is not the empty conjunction true
    let C be of the form (c and Co)
    C := Co
    if c can be written in a form without variables then
      if c can be written as  $0=r$  where  $r \neq 0$  then
        return false
      endif
    else
      write c in the form  $x=e$  where e does not involve x
      substitute e for x throughout C and S
      S := S and  $x=e$ 
    endif
  endwhile
  return S
```



Otros Dominios de Restricciones

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

- Restricciones sobre árboles
- Restricciones booleanas
- Restricciones de secuencias
- Restricciones en el mundo de los bloques



Propiedades de los *Constraint Solvers*

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
*Constraint
Solvers*

Definición 4:

Un **constraint solver** $solv$, para un dominio de restricciones D toma como entrada una restricción C en D y retorna `true`, `false` o `unknown`.

Cuando $solv(C)$ retorna `true`, la restricción C es satisfacible, y cuando $solv(C)$ retorna `false` la restricción C es insatisfacible.



Propiedades de los *Constraint Solvers*

Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Si las restricciones primitivas de dos restricciones son iguales, el resultado de aplicar el *solver* a ambas restricciones será el mismo. Esto es

$$\text{primitivas}(C1) = \text{primitivas}(C2) \implies \text{solv}(C1) = \text{solv}(C2)$$

Si C_1 es una restricción insatisfacible, cualquier conjunción de C_1 con otra restricción C_2 es insatisfacible.

El resultado del *solver* no depende del nombre de las variables de las restricciones. Es decir, si $C_1 : X \geq Y \wedge Y \geq 2$ y $C_2 : U \geq V \wedge V \geq 2$, entonces $\text{solv}(C_1) = \text{solv}(C_2)$.



Gerardo M.
Sarria M.

Restricciones y
Valuaciones

Modelando
con
Restricciones

Satisfacción
de
Restricciones

Otros
Dominios de
Restricciones

Propiedades
de los
Constraint
Solvers

Fin de la Presentación